数列の極限（教科書P94～96）　プリントNo.1

数学Bで習った数列$\{a_n\}$は、$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$で有限だったが（これを有限数列という）

ここでは、$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$と項が限りなく続く『無限数列』を考える。

例えば、　$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$　【①】　においては、nを限りなく大きくすると、第n項は限りなく0に近づく。　（例　$\frac{1}{10^{1000}}=0.0\cdots01$　これは限りなく0に近いことが分かる）

このように、数列$\{a_n\}$において、nを限りなく大きくするとき、a_nがある値αに限りなく近づくならば、$\{a_n\}$はαに『収束する』または$\{a_n\}$の『極限』はαであるという。

（αを$\{a_n\}$の極限値という）

その表し方を

$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha}$　または　$\boxed{n\longrightarrow\infty \text{ のとき } a_n\longrightarrow\alpha}$

例えば、数列①では　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$　または　$n\longrightarrow\infty$　のとき　$\frac{1}{n}\longrightarrow 0$

【　※　『＝』と『→』の使い方に注意しよう！　】

○　収束しない数列の３パターン（$\{a_n\}$は『発散する』という）

[1]　$a_n=2^n$は、nを限りなく大きくすると、2^nは限りなく大きくなる。このような場合、
数列$\{a_n\}$は『正の無限大に発散する』　または　数列$\{a_n\}$の『極限は正の無限大である』
といい、次のように書き表す。　$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n=\infty}$　または　$\boxed{n\longrightarrow\infty \text{ のとき } a_n\longrightarrow\infty}$

[2]　$a_n=-3n$を同様に考えると、$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty}$　または　$\boxed{n\longrightarrow\infty \text{ のとき } a_n\longrightarrow-\infty}$
となり、数列$\{a_n\}$は『負の無限大に発散する』　または　数列$\{a_n\}$の『極限は負の無限大である』
という。

【　※①②の数列については　$\lim_{n\to\infty}2^n=\infty$　$\lim_{n\to\infty}(-3n)=-\infty$　である　】

[3]　$a_n=(-1)^{n-1}n$　（$1, -2, 3, -4, 5, \cdots$）　はnを限りなく大きくするとき、a_nは収束しない。
発散する数列が、正の無限大に発散せず、負の無限大に発散もしない場合、『振動する』という。

[練習１]

(1)　数列$1+1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{3},\ \cdots\cdots,\ 1+\frac{1}{n},\ \cdots\cdots$
は１に収束する。
すなわち，この数列の極限値は　1

(2)　数列$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \cdots\cdots,\ \frac{(-1)^n}{n},\ \cdots\cdots$は，
各項の符号が負，正，負，……と交互に変わりながら０に収束する。
すなわち，この数列の極限値は　0

(3)　nが自然数のとき　$\cos(2n-1)\pi=-1$
したがって，数列$\cos\pi,\ \cos3\pi,\ \cos5\pi,\ \cdots\cdots,\ \cos(2n-1)\pi,\ \cdots\cdots$は$-1$が無限に続く数列であるから$-1$に収束する。
すなわち，この数列の極限値は　-1

[練習２]

(1)　nを限りなく大きくすると，$2n$の値は限りなく大きくなる。
したがって，この数列の極限は　∞

(2)　nを限りなく大きくすると，$-\frac{1}{n}$は０に限りなく近づく。
したがって，この数列の極限は　0

(3)　nを限りなく大きくすると，$-n^2$の値は負で，その絶対値は限りなく大きくなる。
したがって，この数列の極限は　$-\infty$

(4)　この数列は０と２が交互に現れ，nを限りなく大きくするとき，$1+(-1)^n$の値は収束しない。
したがって，この数列の極限は　ない

数列の極限（教科書P97～99）　プリントNo.2－1

次に、極限の計算方法について考えていこう。P97「数列の極限の性質(1)」を確認しよう。

※　a_n，b_n が収束するときは、基本的にそれぞれの極限値を代入すればよい。

ここで、$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$、$\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ のときを考えると、

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$　　$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\infty$　　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$　は明らかである。

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\infty-\infty=?$　　$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\infty}{\infty}=?$　の計算について考えてみる。

実際に計算してみよう。P98の例3 のように、そのまま極限をとると　$\infty-\infty$ や $\frac{\infty}{\infty}$ となり計算ができない場合は、極限をとる前に式変形を行おう！

※　$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2-n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n\sqrt{1-\frac{1}{n}}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1-0}+1}=1$$

☆例題1　$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

分母･分子を n で割る

$$=\frac{1}{2}$$

次に、P99「数列の極限の性質(2)」について考えよう。$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$、$\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ のとき

5　すべての n について　$a_n\leqq b_n$　ならば　$\alpha\leqq\beta$

※　常に $a_n<b_n$ であっても、$\alpha=\beta$ となる場合があるので注意！

6　すべての n について　$a_n\leqq c_n\leqq b_n$　かつ　$\alpha=\beta$　ならば　$\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$

※　5より　$\lim_{n\to\infty} a_n\leqq\lim_{n\to\infty} c_n\leqq\lim_{n\to\infty} b_n$　だから　$\alpha\leqq\lim_{n\to\infty} c_n\leqq\beta=\alpha$

となり、$\lim_{n\to\infty} c_n$ が α にはさまれるため、$\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$　（はさみうちの原理ともいう）

さらに、$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ のとき、すべての n について　$a_n\leqq b_n$　ならば　$\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$

※　$\lim_{n\to\infty} a_n\leqq\lim_{n\to\infty} b_n$　より　$\infty\leqq\lim_{n\to\infty} b_n$（こういう表現はあまりしないが、イメージをもとう）

応用例題1について、$-1\leqq\sin\frac{n\pi}{3}\leqq1$　だから、$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{3}$ の値は収束しない。そこで、

不等式　$-1\leqq\sin\frac{n\pi}{3}\leqq1$　を利用して、はさみうちの原理が使えるようにしよう！

数列の極限（教科書P97～99）　プリントNo.2－2

練習３～練習６の解答

［練習３］

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=1-(-2)=3$

(2) $\lim_{n\to\infty}(3a_n+2b_n)=3\lim_{n\to\infty}a_n+2\lim_{n\to\infty}b_n=3\cdot1+2\cdot(-2)$

$=-1$

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}1=1-1=0$

(4) $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n=1\cdot(-2)=-2$

(5) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n+5}{2a_n-1}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}(b_n+5)}{\lim_{n\to\infty}(2a_n-1)}=\dfrac{-2+5}{2\cdot1-1}=3$

(6) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n-b_n}{a_n+b_n}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)}{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)}=\dfrac{1-(-2)}{1+(-2)}=-3$

［練習４］

(1) $\lim_{n\to\infty}(2n^3-n^2)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(2-\dfrac{1}{n}\right)=\infty$

(2) $\lim_{n\to\infty}(n-3n^2)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\dfrac{1}{n}-3\right)=-\infty$

(3) $\lim_{n\to\infty}(2n-n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\dfrac{2}{n^2}-1\right)=-\infty$

(4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{3-\dfrac{2}{n}}=\dfrac{2}{3}$

(5) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n-1}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{4}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n^2}}=0$

(6) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n-2}{2+\dfrac{1}{n}}=\infty$

［練習５］

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=0$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2-n}-n)(\sqrt{n^2-n}+n)}{\sqrt{n^2-n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n^2-n)-n^2}{\sqrt{n^2-n}+n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-n}{n\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}+1}=-\dfrac{1}{2}$

［練習６］

$-1\leqq\cos\dfrac{n\theta}{6}\leqq1$ より　$-\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\theta}{6}\leqq\dfrac{1}{n}$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)=0$，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ であるから

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\theta}{6}=0$

無限等比数列（教科書P100～103）　プリントNo.3－1

無限等比数列$\{r^n\}$の極限を調べていこう。ここで、等比数列といえば　$a_n=ar^{n-1}$　が一般項であるが、極限($n\longrightarrow\infty$)について関係するのは、公比rの値であるため、初項aは考慮しないとしよう。

P101の数列$\{r^n\}$の極限について　『$r>1$のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$』、『$r=1$のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=1$』はイメージしやすい。

$r\leqq-1$のとき、$\{r^n\}$の項の符号は交互に変わり、$n\longrightarrow\infty$のとき0に収束しない。したがって、$n\longrightarrow\infty$のとき振動することが分かる。（このとき『極限はない』）

$\{r^n\}$の項の符号が交互に変わるとしても、$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$のときを考えると　$\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{(-1)^n}{2^n}$　となり
$n\longrightarrow\infty$のとき、分子は-1または1であるが、分母は∞。よって0に収束する。…①
（※細かい説明は教科書P100を参照のこと。無限数列に対するイメージをもちましょう）

次に、$\left(\frac{1}{2}\right)^n$に関しては上と同様に考えると　$n\longrightarrow\infty$のとき$\left(\frac{1}{2}\right)^n\longrightarrow0$である。…②

①と②をまとめたものが　$-1<r<1$　すなわち　『$|r|<1$のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=0$』となる。

特に、極限が収束するときの条件は、$r=1$または$|r|<1$だから、$-1<r\leqq1$となる。

※等比数列を含む数列の極限を求めるとき、式変形が必要な場合がある。それは、そのまま極限をとると『$\infty-\infty$、$\frac{\infty}{\infty}$、分母が0になる』場合などである。このときは分母が0以外の値に収束するように式変形が必要となる。（例題2、応用例題2を確認しておこう）

基本的に数列の極限は、一般項を調べることにより極限を求めることができる。一つの例として漸化式で表された数列の極限を考えてみよう。

応用例題3　　$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1\ \ (n=1, 2, 3, \cdots)$

特性方程式　$\alpha=\frac{1}{2}\alpha+1$　より　$\alpha=2$　（※数学Bではcを使って変形した）

よって　$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$　より　$a_n-2=(a_1-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって　$a_n=(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2$

よって　$\lim_{n\to\infty} a_n=2$

無限等比数列（教科書P100～103）　プリントNo.3－2

練習７～練習11の解答

［練習７］

(1) 数列 $\{(\sqrt{3})^n\}$ では $\sqrt{3}>1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3})^n=\infty$$

(2) 数列 $\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$ では $\left|\dfrac{2}{3}\right|<1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$

(3) 数列 $\left\{\left(-\dfrac{4}{3}\right)^n\right\}$ では $-\dfrac{4}{3}<-1$ であるから，極限はない。振動する。

(4) 数列 $\left\{2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right\}$ では $\left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right|<1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}=0$$

［練習８］

数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するための必要十分条件は

$-1<x-1\leqq 1$　すなわち　$0<x\leqq 2$

$-1<x-1<1$ すなわち $0<x<2$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}(x-1)^n=0$$

$x-1=1$ すなわち $x=2$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x-1)^n=1$

［練習９］

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{5^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}=1$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-2^n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=0$

［練習１０］

(1) $r>1$ のとき，$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=0$ である

から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n-1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$

(2) $r=1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(3) $|r|<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

(4) $r<-1$ のとき，$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=0$ である

から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n-1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$

［練習１１］

与えられた漸化式を変形すると

$$a_{n+1}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{3}{4}\right)$$

よって，数列 $\left\{a_n-\dfrac{3}{4}\right\}$ は公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列である。

その初項は，$a_1-\dfrac{3}{4}=1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$ であるから

$$a_n-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{3}{4}\right)=0$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{4}$

無限級数（教科書P104～105）　プリントNo.4

無限数列 $\{a_n\}$ の和を『無限級数』といい、　$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$　と表す。

また、初項から第 n 項までの和 S_n を、無限級数の『部分和』という。

無限級数を求めるには、部分和 S_n を求め、$n\longrightarrow\infty$ とすれば求めることができる。すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

である。

※それぞれの Σ の記号内にある文字に注目！n, k の使い分けに注意しよう！

また、部分和 S_n について、$n=1, 2, 3, \cdots$ とすると、新たな無限数列 $\{S_n\}$ と捉えることもできる。
すなわち、無限級数を求めるには、無限数列 $\{S_n\}$ の極限を求めることと同じであるため、今まで学んできた数列の極限の計算方法を用いることができる。（その極限は収束、発散(振動)のいずれか）

例題3および例題4ともに、部分和を求めて $n\longrightarrow\infty$ としている。なお、例題3においては

$1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{(n+1)-1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$　より　$n\longrightarrow\infty$ として極限値 1 を求めてもよいが、

$n\longrightarrow\infty$　のとき　$\dfrac{1}{n+1}\longrightarrow 0$　となるため、計算上差し支えなく、より速く計算できる。

練習12の解答

[練習１２]

(1)　$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$

したがって，この無限級数は収束して，その和は $\dfrac{1}{2}$ である。

(2)　$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$
$$=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots$$
$$+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)=\infty$

したがって，この無限級数は発散する。

無限等比級数（教科書P106～109）　プリントNo.5−1

次に無限等比数列における無限級数、すなわち『無限等比級数』について考える。

無限等比級数の部分和 S_n については、数学Bで学んでいる。初項を a、公比を r とすると、

［Ⅰ］ $a=0$ のとき、明らかに $S_n=0$

［Ⅱ］ $a\neq 0$ において

① $r=1$ のとき　$S_n=a+a+a+\cdots+a=na$

② $r\neq 1$ のとき　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

※$S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ としてもよいが、以下まとめることを考えて $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ としよう。

この部分和について $n\longrightarrow\infty$ として、無限等比級数を求めてみよう。

［Ⅰ］ $a=0$ のとき、$S_n=0$ より　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=0$

［Ⅱ］ $a\neq 0$ において

① $r=1$ のとき、$S_n=na$ より　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$ または $-\infty$　となり発散する。

a の符号により決定

② $r\neq 1$ のとき　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a}{1-r}-\dfrac{a}{1-r}\cdot r^n$

部分和 S_n は一部、等比数列を含んだ数列になるため、無限等比数列の考え方を利用する。

$|r|<1$ のとき　$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$　より　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a}{1-r}$

$r\leqq -1$　または　$r>1$　のとき　数列 $\{r^n\}$ は発散するから、$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ も発散する。

以上のことから、無限等比級数の収束、発散を調べるとき、a, r の値によって決まるため、部分和 S_n を求めなくてもよい。

例題5(1)　初項 2、公比 $\dfrac{1}{3}$

公比について　$\left|\dfrac{1}{3}\right|<1$　より収束し、その和は　$\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{3}}=3$

※応用問題（応用例題4や例6 など）においても、無限等比級数として扱うことができれば容易に計算できる。

なお、例6においては $S=0.3\dot{1}\dot{8}$ として、$1000S-10S=315$ としても求めることができるよ。

無限等比級数（教科書P106～109）　プリントNo.5－2

練習13～練習16の解答

[練習１３]

(1)　初項が1，公比について $\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$ であるから収束して，その和は $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}}=2$

(2)　初項が $\sqrt{2}$，公比について $|-\sqrt{2}|>1$ であるから，発散する。

(3)　公比 $r=-\dfrac{1}{3}$

初項が1，公比について $\left|-\dfrac{1}{3}\right|<1$ であるから収束して，その和は $\dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}=\dfrac{1}{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{3}{4}$

(4)　公比 $r=\sqrt{2}-1$

初項が $\sqrt{2}+1$，公比について $|\sqrt{2}-1|<1$ であるから収束して，その和は

$$\frac{\sqrt{2}+1}{1-(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{4+3\sqrt{2}}{2}$$

[練習１４]

(1)　初項が1，公比が $2-x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は $|2-x|<1$

より　　$-1<2-x<1$

よって　　$1<x<3$

(2)　初項が x，公比が $2-x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は

$$x=0 \text{ または } |2-x|<1$$

$|2-x|<1$ より　　$1<x<3$

よって，求める x の値の範囲は

$$x=0,\ 1<x<3$$

[練習１５]

点Ｐの座標は，順に次のようになる。

$$1,\ 1-\frac{1}{2^2},\ 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4},\ 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^6},\ \cdots\cdots$$

よって，点Ｐの極限の位置の座標は，初項1，公比 $-\dfrac{1}{2^2}$ の無限等比級数で表される。

公比について $\left|-\dfrac{1}{2^2}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して，その和は

$$\frac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{2^2}\right)}=\frac{4}{5}$$

したがって，点Ｐの極限の位置の座標は　$\dfrac{4}{5}$

[練習１６]

(1)　　$0.\dot{6}=0.6+0.06+0.006+\cdots\cdots$

よって，$0.\dot{6}$ は初項0.6，公比0.1の無限等比級数である。

$|0.1|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$0.\dot{6}=\frac{0.6}{1-0.1}=\frac{0.6}{0.9}=\frac{2}{3}$$

(2)　　$0.2\dot{3}\dot{4}=0.2+0.034+0.00034+\cdots\cdots$

この右辺の第2項以降は，初項0.034，公比0.01の無限等比級数である。

$|0.01|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$0.2\dot{3}\dot{4}=0.2+\frac{0.034}{1-0.01}=\frac{2}{10}+\frac{34}{990}=\frac{232}{990}=\frac{116}{495}$$

(3)　　$0.4\dot{7}0\dot{2}=0.4+0.0702+0.0000702+\cdots\cdots$

この右辺の第2項以降は，初項0.0702，公比0.001の無限等比級数である。

$|0.001|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$0.4\dot{7}0\dot{2}=0.4+\frac{0.0702}{1-0.001}=\frac{4}{10}+\frac{702}{9990}$$
$$=\frac{4698}{9990}=\frac{87}{185}$$

無限級数の性質（教科書P109～111）　プリントNo.6

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$ より、「数列の極限の性質(1)」から無限級数の性質が得られる。これは、お互いに収束する無限級数の計算方法である。

次に、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束、発散と、数列 $\{a_n\}$ の極限について考える。

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ （収束する）、その部分和 S_n とする。このとき、$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ である。

$n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$ より　$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1})$

$$= S - S$$
$$= 0$$

したがって、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である。よって次が成り立つ。

1	無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する　$\Longrightarrow$　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2	数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない　$\Longrightarrow$　無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する　（１の対偶）

※例7が上の２を利用して解く方法を載せた問題である。

練習17～18の解答

［練習１７］

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ は，初項 $\frac{1}{4}$，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数であり，

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ は，初項 $\frac{2}{3}$，公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数である。

公比について，$\left|\frac{1}{4}\right| < 1$，$\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ であるから，

これらの無限等比級数はともに収束して，それぞれの和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3},\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1$$

よって　$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n} + \frac{2}{3^n}\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

(2) $\frac{2^n - 3^n}{4^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ は，初項 $\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数であり，

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ は，初項 $\frac{3}{4}$，公比 $\frac{3}{4}$ の無限等比級数である。

公比について，$\left|\frac{1}{2}\right| < 1$，$\left|\frac{3}{4}\right| < 1$ であるから，

これらの無限等比級数はともに収束して，それぞれの和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 3$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right\} = 1 - 3 = -2$$

［練習１８］

第 n 項を a_n とすると　$a_n = (-1)^{n-1}\cdot(2n-1)$

$n \longrightarrow \infty$ のとき数列 $\{a_n\}$ は発散するから，無限級数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

節末問題解答（教科書P112）　プリントNo.7

［問題１］

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{1+1}$

$=1$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-n}-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-n}+n}{(\sqrt{n^2-n}-n)(\sqrt{n^2-n}+n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-n}+n}{(n^2-n)-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-n}+n}{-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1-\frac{1}{n}}+n}{-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1}{-1}$

$=-2$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^{n+1}}{2^{2n}-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4\cdot 4^n}{4^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+4}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

$=4$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}-2^n}{3^n+(-2)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1}{3}$

［問題２］

数列 $\{(x^2-3)^n\}$ が収束するための必要十分条件は

$-1<x^2-3\leqq 1$　すなわち　$\begin{cases}-1<x^2-3\\ x^2-3\leqq 1\end{cases}$

$-1<x^2-3$ から　　$x<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<x$　……①

$x^2-3\leqq 1$ から　　$-2\leqq x\leqq 2$　……②

①，② の共通範囲を求めて，求める x の値の範囲は

$-2\leqq x<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<x\leqq 2$

このとき，極限値は

$x^2-3=1$ すなわち $x=\pm 2$ のとき　1

$|x^2-3|<1$ すなわち

$-2<x<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<x<2$ のとき　0

［問題３］

$a_n=\frac{r^{2n}-1}{r^{2n}+1}$ とおく。

(1) $|r|<1$ のとき，$0\leqq r^2<1$ より $\lim_{n\to\infty}(r^2)^n=0$ であるから

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(r^2)^n-1}{(r^2)^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$

(2) $|r|=1$ のとき，$r^2=1$ より $\lim_{n\to\infty}(r^2)^n=1$ であるから

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(r^2)^n-1}{(r^2)^n+1}=\frac{1-1}{1+1}=0$

(3) $|r|>1$ のとき，$0<\frac{1}{r^2}<1$ より $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r^2}\right)^n=0$ であるから

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{r^2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{r^2}\right)^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$

［問題４］

(1)　与えられた漸化式を変形すると

$a_{n+1}+3=\frac{2}{3}(a_n+3)$

よって，数列 $\{a_n+3\}$ は公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列である。

その初項は，$a_1+3=1+3=4$ であるから

$a_n+3=4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=0$ であるから　　$\lim_{n\to\infty}(a_n+3)=0$

したがって　　$\lim_{n\to\infty}a_n=-3$

(2)　与えられた漸化式を変形すると

$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

よって，数列 $\{a_n+1\}$ は公比 2 の等比数列である。

その初項は，$a_1+1=1+1=2$ であるから

$a_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

$\lim_{n\to\infty}2^n=\infty$ であるから　　$\lim_{n\to\infty}(a_n+1)=\infty$

したがって　　$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

［問題５］

初項が x，公比が $(1-x)^2$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は

$x=0$ または $|(1-x)^2|<1$

$(1-x)^2<1$ を解くと　　$0<x<2$

よって，求める x の値の範囲は　　$0\leqq x<2$

また，和は

$x=0$ のとき　　0

$0<x<2$ のとき　$\frac{x}{1-(1-x)^2}=\frac{x}{2x-x^2}=\frac{1}{2-x}$

［問題６］

$\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ と $\triangle A_nB_nC_n$ は相似で，相似比は $1:2$ であるから，面積比は $1^2:2^2$ である。

$\triangle A_nB_nC_n$ の面積を S_n とすると

$S_1=\frac{1}{4}a$，$S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$

よって，$S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots+S_n+\cdots\cdots$ は，

初項 $\frac{1}{4}a$，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数である。

公比について $\left|\frac{1}{4}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束する。

よって，求める和 S は　　$S=\frac{\frac{1}{4}a}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}a$