「自律・創造・敬愛」

114 $x^2+px-1=0$ の2つの解をα, βとすると、
解と係数の関係から

$\alpha+\beta=-p$ —①, $\alpha\beta=-1$ —②

$x^2-p^2x-p=0$ の2つの解は $\alpha+1$, $\beta+1$ になるから
解と係数の関係から

$(\alpha+1)+(\beta+1)=p^2$ すなわち $\alpha+\beta+2=p^2$ —③

$(\alpha+1)(\beta+1)=-p$ すなわち $\alpha\beta+\alpha+\beta+1=-p$ —④

①を③に代入してα, βを消去すると

$-p+2=p^2$

$p^2+p-2=0$

$(p+2)(p-1)=0$ $\therefore p=-2, 1$

また、④の左辺に①,②を代入すると $-p=-p$ となり、
これは常に成り立つ。
したがって、求めるpの値は $p=-2, 1$

115 $x^2+2(3m-1)x+9m^2-4=0$ —①

判別式をDとすると、

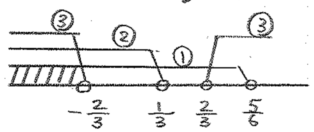
$\dfrac{D}{4}=(3m-1)^2-1\cdot(9m^2-4)=-6m+5$

①の2つの解をα, βとすると、

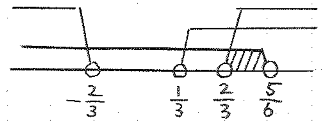
$\alpha+\beta=-2(3m-1)$

$\alpha\beta=9m^2-4=(3m+2)(3m-2)$

(1) ①が異なる2つのともに正の解をもつとき
(i) $D>0$, (ii) $\alpha+\beta>0$, (iii) $\alpha\beta>0$
であればよい。
(i)から $-6m+5>0$ すなわち $m<\frac{5}{6}$
(ii)から $-2(3m-1)>0$ すなわち $m<\frac{1}{3}$
(iii)から $(3m+2)(3m-2)>0$ すなわち $m<-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}<m$
(i)(ii)(iii)の共通範囲を求めて、
$m<-\frac{2}{3}$



(2) ①が異なる2つのともに負の解をもつとき
(i) $D>0$, (ii) $\alpha+\beta<0$, (iii) $\alpha\beta>0$
であればよい。
(i)から $m<\frac{5}{6}$
(ii)から $-2(3m-1)<0$ すなわち $m>\frac{1}{3}$
(iii)から $m<-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}<m$
(i)(ii)(iii)の共通範囲を求めて
$\frac{2}{3}<m<\frac{5}{6}$



(3) ①が異なる2つの異符号の解をもつとき
$\alpha\beta<0$
であればよいから
$(3m+2)(3m-2)<0$
したがって
$-\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}$

「学校の時間割に合わせて、
自習する教科を決めてみるといいかも」

116 $x^2+2mx+2m^2-5=0$ ―― ①

①の判別式を D とすると、

$D/4 = m^2 - 1\cdot(2m^2-5) = -m^2+5$

①の2つの解を α, β とすると、解と係数の関係から

$\alpha+\beta = -2m,\quad \alpha\beta = 2m^2-5$

①が1より大きい異なる2つの解をもつとき

(i) $D>0$, (ii) $(\alpha-1)+(\beta-1)>0$, (iii) $(\alpha-1)(\beta-1)>0$

であればよい。

(i)から $-m^2+5>0$

$m^2-5<0$

$(m+\sqrt{5})(m-\sqrt{5})<0$ すなわち $-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$

(ii)から $\alpha+\beta-2>0$ なので

$-2m-2>0$ すなわち $m<-1$

(iii)から $\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$ なので

$2m^2-5-(-2m)+1>0$

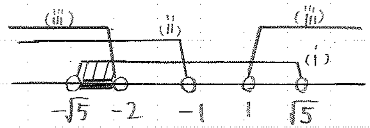
$2m^2+2m-4>0$

$m^2+m-2>0$

$(m+2)(m-1)>0$ すなわち $m<-2, 1<m$

(i)(ii)(iii)の共通範囲を求めて

$-\sqrt{5}<m<-2$



117 $2x^2-4mx+m+3=0$ ―― ①

①の判別式を D とすると

$D/4 = (-2m)^2 - 2\cdot(m+3) = 4m^2-2m-6 = 2(2m^2-m-3)$

$= 2(m+1)(2m-3)$

①の2つの解を α, β とすると、解と係数の関係から

$\alpha+\beta = -\dfrac{-4m}{2} = 2m,\quad \alpha\beta = \dfrac{m+3}{2}$

(1) ①の解がともに1より小さいとき

(i) $D>0$ (ii) $(\alpha-1)+(\beta-1)<0$ (iii) $(\alpha-1)(\beta-1)>0$

(i)から $(m+1)(2m-3)>0$ すなわち $m<-1,\ \frac{3}{2}<m$

(ii)から $\alpha+\beta-2<0$

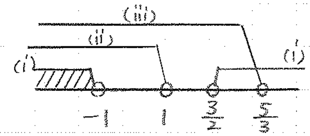
$2m-2<0$ すなわち $m<1$

(iii)から $\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$

$\dfrac{m+3}{2}-2m+1>0$ すなわち $m<\frac{5}{3}$

(i)(ii)(iii)の共通範囲を求めて

$m<-1$



(2) ①の1つの解が1より大きく、他の解が1より小さいとき、$\alpha-1$ と $\beta-1$ が異符号となるので、

$(\alpha-1)(\beta-1)<0$

となればよいから

$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1<0$

$\dfrac{m+3}{2}-2m+1<0$

$m+3-4m+2<0$

よって

$m>\dfrac{5}{3}$

「やらずに後悔するくらいなら、
やって失敗した方がいい。」

122 (1) $P(x)=x^3+4x^2-3x-18$ とおく。
$P(x)$ を $x+1$ で割った余りは
$P(-1)=-1+4+3-18=-12$

(2) $P(2)=2^3+4\cdot2^2-3\cdot2-18=8+16-6-18=0$
よって $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。
右の割り算から

$$P(x)=(x-2)(x^2+6x+9)$$
$$=(x-2)(x+3)^2$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 4 & -3 & -18 & 2 \\ & 2 & 12 & 18 & \\ \hline 1 & 6 & 9 & 0 & \end{array}$$

123 (1) $P(x)=2x^3+x^2+x-1$ とおく。
$P\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1=0$
よって $P(x)$ は $2x-1$ を因数にもつ。
下の割り算から

$$P(x)=(2x-1)(x^2+x+1)$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2+x+1 \\ \hline 2x-1 & 2x^3+x^2+x-1 \\ & 2x^3-x^2 \\ \hline & 2x^2+x \\ & 2x^2-x \\ \hline & 2x-1 \\ & 2x-1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

※組立除法を用いた場合

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ & 1 & 1 & 1 & \\ \hline 2 & 2 & 2 & 0 & \end{array}$$

これは $x-\frac{1}{2}$ で割ったとき
商が $2x^2+2x+2$，余りが 0
であることを表しており

$$P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x+2)$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)2(x^2+x+1)$$
$$=(2x-1)(x^2+x+1)$$

と因数分解できる。

因数定理
$P(x)$ が $x-k$ を因数にもつ $\Leftrightarrow$ $P(k)=0$
$P(x)$ が $ax-b$ を因数にもつ $\Leftrightarrow$ $P\left(\frac{b}{a}\right)=0$

(2) $P(x)=2x^3+x^2-x+3$ とおく。

$$P\left(-\frac{3}{2}\right)=2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\left(-\frac{3}{2}\right)+3$$
$$=-\frac{27}{4}+\frac{9}{4}+\frac{3}{2}+3$$
$$=0$$

よって、$P(x)$ は $2x+3$ を因数にもつ。
右の割り算から

$$P(x)=(2x+3)(x^2-x+1)$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2-x+1 \\ \hline 2x+3 & 2x^3+x^2-x+3 \\ & 2x^3+3x^2 \\ \hline & -2x^2-x \\ & -2x^2-3x \\ \hline & 2x+3 \\ & 2x+3 \\ \hline & 0 \end{array}$$

(3) $P(x)=x^4+3x^3-5x^2-3x+4$ とおく。
$P(1)=1+3-5-3+4=0$
よって、$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。
右の割り算から

$$P(x)=(x-1)(x^3+4x^2-x-4)$$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 3 & -5 & -3 & 4 & 1 \\ & 1 & 4 & -1 & -4 & \\ \hline 1 & 4 & -1 & -4 & 0 & \end{array}$$

つづいて
$Q(x)=x^3+4x^2-x-4$ とおく。
$Q(1)=1+4-1-4=0$
よって $Q(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。
右の割り算から

$$Q(x)=(x-1)(x^2+5x+4)$$
$$=(x-1)(x+1)(x+4)$$

したがって

$$P(x)=(x-1)Q(x)$$
$$=(x-1)^2(x+1)(x+4)$$

「過去の経験から学ぶ」

124 $P(x)=x^3+ax+b$

$P(x)$を $x-1$ で割った余りが3なので $P(1)=3$ である。

よって

$P(1)=1+a+b=3$ すなわち $a+b=2$ —①

$P(x)$を $x+1$ で割った余りが5なので $P(-1)=5$ である。

よって

$P(-1)=-1-a+b=5$ すなわち $-a+b=6$ —②

①②から

$a=-2,\ b=4$

125 $P(x)=x^3+ax^2+2x+b$ —①

$P(x)$を x^2-3x+2 で割った商を $Q(x)$とすると、

余りが $3x+4$ なので

$P(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+3x+4$

$=(x-1)(x-2)Q(x)+3x+4$ —②

①において

$P(1)=1+a+2+b=a+b+3$ —③

$P(2)=8+4a+4+b=4a+b+12$ —④

②において

$P(1)=3\cdot1+4=7$ —⑤

$P(2)=3\cdot2+4=10$ —⑥

③と⑤、④と⑥はそれぞれ一致するから

$a+b+3=7$ すなわち $a+b=4$

$4a+b+12=10$ すなわち $4a+b=-2$

これを連立方程式として解くと

$a=-2,\ b=6$

別 $P(x)$は3次式、割る式は2次式なので商は1次式

なので、商を $cx+d$ とすると

$x^3+ax^2+2x+b=(x^2-3x+2)(cx+d)=3x+4$

126 $P(x)$を $(x-2)(x+3)$ で割った商を $Q(x)$,

余りを $ax+b$ とすると

$P(x)=(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b$

$x-2$ で割った余りが -1 なので $P(2)=-1$ だから

$P(2)=2a+b=-1$ —①

$x+3$ で割った余りが 9 なので $P(-3)=9$ だから

$P(-3)=-3a+b=9$ —②

①,②から

$a=-2,\ b=3$

よって、求める余りは $-2x+3$

127 $P(x)$を x^2-4x+3で割った商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$とすると

$P(x)=(x^2-4x+3)Q(x)+ax+b$

$=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b$

よって

$P(1)=a+b$ —①, $P(3)=3a+b$ —②

また、$P(x)$を x^2+x-2で割った商を $Q_1(x)$ とすると余りが $-3x+8$だから

$P(x)=(x^2+x-2)Q_1(x)-3x+8$

$=(x-1)(x+2)Q_1(x)-3x+8$

よって

$P(1)=-3+8=5$ —③

次に $P(x)$を x^2-x-6 で割った商を $Q_2(x)$ とすると、余りが $-5x+4$だから

$P(x)=(x^2-x-6)Q_2(x)-5x+4$

$=(x-3)(x+2)Q_2(x)-5x+4$

よって

$P(3)=-15+4=-11$

①と③, ②と④ は それぞれ一致するから

$a+b=5$, $3a+b=-11$

これを連立方程式として解くと $a=-8,\ b=13$

よって求める余りは $-8x+13$

「無知の知」

128 (1)

2	-4	1	5	1
	2	-2	-1	
2	-2	-1	4	

商 $2x^2-2x-1$ 余り 4

(2)

5	7	0	-3	-2
	-10	6	-12	
5	-3	6	-15	

商 $5x^2-3x+6$ 余り -15

(3)

2	5	-7	3	$\frac{1}{2}$
	1	3	-2	
2	6	-4	1	

この割り算から

$$2x^3+5x^2-7x+3=\left(x-\tfrac{1}{2}\right)(2x^2+6x-4)+1$$
$$=(2x-1)(x^2+3x-2)+1$$

よって

商 x^2+3x-2 余り 1

129 $P(x)=x^{99}$ ——① とおく。

$P(x)$ を x^2-1 で割った商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$$P(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$$
$$=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b \text{ ——②}$$

①において

$P(1)=1$ ——③，　$P(-1)=-1$ ——④

②において

$P(1)=a+b$ ——⑤，　$P(-1)=-a+b$ ——⑥

③と⑤，④と⑥はそれぞれ一致するので

$a+b=1$，$-a+b=-1$

これを連立方程式として解くと　$a=1$，$b=0$

よって求める余りは　x

135 $x^3+4x^2-x-22=0$

$P(x)=x^3+4x^2-x-22$ とすると，

$P(2)=2^3+4\cdot2^2-2-22=0$

1	4	-1	-22	2
	2	12	22	
1	6	11	0	

よって $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$P(x)=(x-2)(x^2+6x+11)$

$P(x)=0$ から

$x-2=0$ または $x^2+6x+11=0$

したがって

$x=2，-3\pm\sqrt{3^2-11}$

すなわち

$x=2，-3\pm\sqrt{2}\,i$

136 (1) $x^4+3x^3-12x^2-20x+48=0$

$P(x)=x^4+3x^3-12x^2-20x+48$ とおく。

$P(2)=2^4+3\cdot2^3-12\cdot2^2-20\cdot2+48=0$

1	3	-12	-20	48	2
	2	10	-4	-48	
1	5	-2	-24	0	

よって $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$P(x)=(x-2)(x^3+5x^2-2x-24)$

$Q(x)=x^3+5x^2-2x-24$ とおく。

$Q(2)=2^3+5\cdot2^2-2\cdot2-24=0$

1	5	-2	-24	2
	2	14	24	
1	7	12	0	

よって $Q(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$Q(x)=(x-2)(x^2+7x+12)$
$=(x-2)(x+3)(x+4)$

ゆえに

$P(x)=(x-2)Q(x)$
$=(x-2)^2(x+3)(x+4)$

$P(x)=0$ から

$x=2，-3，-4$

「迷った時の二択　今やるかすぐやる」

136 (2) $x^4-6x^3+8x^2-10x-25=0$

$P(x)=x^4-6x^3+8x^2-10x-25$ とおく。

$P(-1)=(-1)^4-6(-1)^3+8(-1)^2-10(-1)-25=0$

よって、$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$P(x)=(x+1)(x^3-7x^2+15x-25)$

$Q(x)=x^3-7x^2+15x-25$ とおく。

$Q(5)=5^3-7\cdot5^2+15\cdot5-25=0$

よって $Q(x)$ は $x-5$ を因数にもつ。

$Q(x)=(x-5)(x^2-2x+5)$

ゆえに

$P(x)=(x+1)Q(x)$

$=(x+1)(x-5)(x^2-2x+5)$

$P(x)=0$ から

$x+1=0$ または $x-5=0$ または $x^2-2x+5=0$

すなわち

$x=-1,\ 5,\ 1\pm2i$

(3) $(x^2-x)^2-5(x^2-x)+6=0$

$x^2-x=t$ とおく。

$t^2-5t+6=0$

$(t-2)(t-3)=0$

よって

$(x^2-x-2)(x^2-x-3)=0$

$(x+1)(x-2)(x^2-x-3)=0$

ゆえに

$x+1=0$ または $x-2=0$ または $x^2-x-3=0$

よって

$x=-1,\ 2,\ \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

(4) $x^4+4=0$

$x^4+4x^2+4-4x^2=0$

$(x^2+2)^2-(2x)^2=0$

よって

$(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=0$

よって

$x^2+2x+2=0$ または $x^2-2x+2=0$

ゆえに

$x=-1\pm i,\ 1\pm i$

137 $x^3+ax^2+bx+10=0$ —①

$1+2i$ がこの2次方程式の解なので

$(1+2i)^3+a(1+2i)^2+b(1+2i)+10=0$

$1+6i+12i^2+8i^3+a(1+4i+4i^2)+b+2bi+10=0$

$1+6i-12-8i+a+4ai-4a+b+2bi+10=0$

$-3a+b-1+(4a+2b-2)i=0$

a,b は実数なので

$-3a+b-1=0$

$4a+2b-2=0$

よって

$a=0,\ b=1$

このとき①は

$x^3+x+10=0$

$P(x)=x^3+x+10$ とおくと

$P(-2)=-8-2+10=0$

よって $P(x)$ は $x+2$ を因数にもつ。

$P(x)=(x+2)(x^2-2x+5)$

$P(x)=0$ の解は

$x=-2,\ 1\pm2i$

答 $a=0,\ b=1$, 他の解 $-2,\ 1-2i$

「禍福は糾(あざな)える縄のごとし」

138 ωは1の3乗根だから

$\omega^3 = 1$ ——— ①

また、この方程式を変形して

$\omega^3 - 1 = 0$

$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$

ωは虚数なので

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ ——— ②

(1) $\omega^3 + \omega^2 + \omega = \omega(\omega^2 + \omega + 1)$

$= \omega \cdot 0$

$= 0$

②を利用

(2) $\omega^6 + \omega^3 + 1 = (\omega^3)^2 + \omega^3 + 1$

$= 1^2 + 1 + 1$

$= 3$

①を利用

(3) $\omega^8 + \omega^4 = (\omega^3)^2 \cdot \omega^2 + \omega^3 \cdot \omega$

$= 1^2 \cdot \omega^2 + 1 \cdot \omega$

$= \omega^2 + \omega$

$= \omega^2 + \omega + 1 - 1$

$= 0 - 1$

$= -1$

①を利用

②を利用

139 もとの立方体の1辺の長さを $x$cm とする。

条件から

$(x+2)(x+3)(x-1) = 60$

$(x^2+5x+6)(x-1) = 60$

$x^3+5x^2+6x-x^2-5x-6-60=0$

$x^3+4x^2+x-66=0$

$P(x) = x^3+4x^2+x-66$ とおく。

$P(3) = 3^3+4\cdot3^2+3-66=0$

よって $P(x)$ は $x-3$ を因数にもつ。

$P(x) = (x-3)(x^2+7x+22)$

$P(x)=0$ とすると

$x-3=0$ または $x^2+7x+22=0$

よって

$x = 3,\ \dfrac{-7 \pm \sqrt{7^2-4\cdot22}}{2}$

$= 3,\ \dfrac{-7 \pm \sqrt{39}\,i}{2}$

xは1より大きい実数なので

$x = 3$

答 3cm

「try and error をくり返すことが
経験になる。失敗を恐れるな。」

140 $x^3+4x^2+(a-12)x-2a=0$

$P(x)=x^3+4x^2+(a-12)x-2a$ とおく。

$P(2)=2^3+4\cdot2^2+(a-12)\cdot2-2a$

$=8+16+2a-24-2a$

$=0$

よって、$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$P(x)=(x-2)(x^2+6x+a)$

1	4	a−12	−2a	2
	2	12	2a	
1	6	a	0	

$P(x)=0$ の異なる解が2つであるのは、

(i) $x^2+6x+a=0$ が、2以外の重解をもつ

または

(ii) $x^2+6x+a=0$ が、2と別の値を解にもつ。

(i)について、

$x^2+6x+a=0$ ① の判別式を D とすると

$D/4=3^2-1\cdot a=9-a$

①が重解をもつとき $D=0$ だから

$9-a=0$ すなわち $a=9$

このとき①は $(x+3)^2=0$ となり、条件を満たす。

(ii)について、

$x^2+6x+a=0$ ① が 2 を解にもつので

$2^2+6\cdot2+a=0$ よって $a=-16$

このとき①は

$x^2+6x-16=0$

$(x+8)(x-2)=0$

$x=-8, 2$

となり、条件を満たす。

(i)(ii)から $a=9, -16$

「GOAL!」

よく頑張りました。
自分で自分をほめてあげましょう。

☆ 課題2「教科書の予習」も各自で
すすめておきましょう。