「そのうち きっと 大きな声で 笑える日が来る」

93 (1) $3(x+2)^2+5(x+2)-2=0$

$x+2=t$ とおくと

$3t^2+5t-2=0$

$(3t-1)(t+2)=0$

$t=\frac{1}{3},-2$

よって

$x=t-2=\frac{1}{3}-2,\ -2-2=-\frac{5}{3},\ -4$

別

$3(x^2+4x+4)+5(x+2)-2=0$

$3x^2+17x+20=0$

$(3x+5)(x+4)=0$

よって

$x=-\frac{5}{3},\ -4$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \times & 5 & \to & 5 \\ 1 & & 4 & \to & 12 \\ \hline 3 & & 20 & & 17 \end{array}$$

(2) $2(x-1)^2-2(x-1)+1=0$

$x-1=t$ とおく。

$2t^2-2t+1=0$

$t=\frac{1\pm\sqrt{1-2}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-1}}{2}=\frac{1\pm i}{2}$

よって

$x=t+1=\frac{3\pm i}{2}$

(3) $x^2-\sqrt{5}x+\sqrt{5}-1=0$

解の公式を用いて

$x=\frac{-(-\sqrt{5})\pm\sqrt{(-\sqrt{5})^2-4\cdot1\cdot(\sqrt{5}-1)}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{5-4\sqrt{5}+4}}{2}$

$=\frac{5\pm\sqrt{9-2\sqrt{20}}}{2}=\frac{5\pm(\sqrt{5}-\sqrt{4})}{2}=\sqrt{5}-1,\ 1$

別 $x^2-\sqrt{5}x+\sqrt{5}-1=0$

$x^2-1-\sqrt{5}(x-1)=0$

$(x-1)(x+1)-\sqrt{5}(x-1)=0$

$(x-1)(x+1-\sqrt{5})=0$

よって

$x=1,\ -1+\sqrt{5}$

(4) $x^2-2x+6+2\sqrt{6}=0$

解の公式を用いて

$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(6+2\sqrt{6})}$

$=1\pm\sqrt{-(5+2\sqrt{6})}$

$=1\pm\sqrt{5+2\sqrt{6}}\,i$

$=1\pm(\sqrt{3}+\sqrt{2})i$

※ 2乗根号

$\sqrt{\underbrace{a+b}_{和}\pm2\sqrt{\underbrace{ab}_{積}}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ （複号同順）

※引き算の場合 $a>b$

「長く助走をとった方が
より遠くに飛べるって聞いた」

94 (1) $x^2-5x+3-2m=0$

判別式をDとすると

$$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot(3-2m)=8m+13$$

(i) $D>0$ すなわち $m>-\frac{13}{8}$ のとき 異なる2つの実数解

(ii) $D=0$ すなわち $m=-\frac{13}{8}$ のとき 重解

(iii) $D<0$ すなわち $m<-\frac{13}{8}$ のとき 異なる2つの虚数解

(2) $4x^2+(m-1)x+1=0$

判別式をDとすると

$$D=(m-1)^2-4\cdot4\cdot1=m^2-2m-15$$
$$=(m+3)(m-5)$$

(i) $D>0$ すなわち $m<-3,\ 5<m$ のとき 異なる2つの実数解

(ii) $D=0$ すなわち $m=-3, 5$ のとき 重解

(iii) $D<0$ すなわち $-3<m<5$ のとき 異なる2つの虚数解

95 $kx^2+4x+2=0$ —— ①

[1] $k=0$ のとき ①は1次方程式で

$4x+2=0$ ∴ $x=-\frac{1}{2}$

よって ①は1つの実数解をもつ。

[2] $k\neq0$ のとき ②は2次方程式となり、

判別式をDとすると、

$$D=4^2-4\cdot k\cdot 2=16-8k=8(2-k)$$

(i) $D>0$ すなわち $2-k>0$ から $k<2$ (ただし $k\neq0$) のとき
異なる2つの実数解をもつ。

(ii) $D=0$ すなわち $2-k=0$ から $k=2$ のとき
重解をもつ。

(iii) $D<0$ すなわち $2-k<0$ から $k>2$ のとき
異なる2つの虚数解をもつ。

96 $x^2+ax+a+3=0$ —① の判別式をD_1とすると

$$D_1=a^2-4\cdot1\cdot(a+3)=a^2-4a-12$$
$$=(a+2)(a-6)$$

①が虚数解をもつとき $D_1<0$ だから

$-2<a<6$

$x^2-ax+4=0$ —③ の判別式をD_2とすると、

$$D_2=(-a)^2-4\cdot1\cdot4=a^2-16$$
$$=(a+4)(a-4)$$

③が虚数解をもつとき $D_2<0$ だから

$-4<a<4$ —— ④

①,③がともに虚数解をもつのは、②,④の共通範囲を求めて

$-2<a<4$

97 $ax^2+bx+c=0$ —— ①

①の判別式をDとすると

$$D=b^2-4ac$$

aとcが異符号のとき $ac<0$ だから $-4ac>0$

またbは実数なので $b^2\geq0$

よって

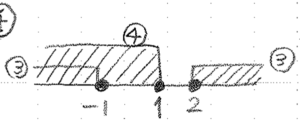
$b^2-4ac>0$

したがって、$D>0$であるから、①は異なる2つの実数解をもつ。

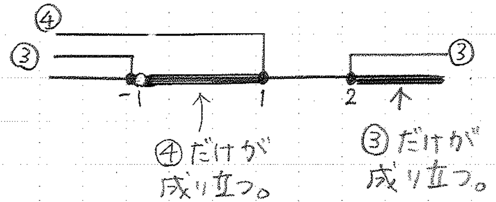
「ジョギングも周りと距離をとる」

98 $x^2+2ax+a+2=0$ —— ①
$x^2-4x+a+3=0$ —— ②
①②の判別式をそれぞれ D_1, D_2 とすると
$D_1=(2a)^2-4\cdot1\cdot(a+2)=4a^2-4a-8$
$=4(a^2-a-2)=4(a+1)(a-2)$
$D_2=(-4)^2-4\cdot1\cdot(a+3)$
$=-4a+4=-4(a-1)$

(1) 少なくとも一方が実数解をもつとき
$D_1\geqq0$ または $D_2\geqq0$
が成り立てばよい。
$D_1\geqq0$ から $a\leqq-1,\ 2\leqq a$ —— ③
$D_2\geqq0$ から $a\leqq1$ —— ④
③と④の和集合を求めて、
$a\leqq1,\ 2\leqq a$



(2) 一方だけが実数解をもつのは
$D_1\geqq0$ と $D_2\geqq0$ の一方だけが成り立つとき
なので、数直線で考えて



よって
$-1<a\leqq1,\ 2\leqq a$

103 $2x^2-8x+5=0$
解と係数の関係から、
$\alpha+\beta=-\frac{-8}{2}=4,\ \alpha\beta=\frac{5}{2}$
よって
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2\cdot\frac{5}{2}=11$
また
$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=4^3-3\cdot\frac{5}{2}\cdot4$
$=64-30=34$
別
$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=4\left(11-\frac{5}{2}\right)=34$

106 $x^2-x-5=0$
解と係数の関係から
$\alpha+\beta=-\frac{-1}{1}=1,\ \alpha\beta=\frac{-5}{1}=-5$

(1) $2\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)=2\cdot1=2$
$2\alpha\cdot2\beta=4\alpha\beta=4\cdot(-5)=-20$
よって、$2\alpha, 2\beta$ を解とする2次方程式は
$x^2-2x-20=0$

(2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot(-5)=11$
$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(-5)^2=25$
よって、α^2, β^2 を解とする2次方程式は
$x^2-11x+25=0$

(3) $(\alpha+1)+(\beta+1)=(\alpha+\beta)+2=1+2=3$
$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=-5+1+1=-3$
よって、$\alpha+1, \beta+1$ を解とする2次方程式は
$x^2-3x-3=0$

「筋トレ、ヨガなどは自宅で、動画を見ながら」

106 (4)

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{11}{-5}=-\frac{11}{5}$$

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=1$$

よって、$\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\beta}$ を解とする2次方程式は

$$x^2-\left(-\frac{11}{5}\right)x+1=0$$

すなわち

$$5x^2+11x+5=0$$

107

$$3x^2-6x+1=0$$

解と係数の関係から、

$$\alpha+\beta=-\frac{-6}{3}=2,\quad \alpha\beta=\frac{1}{3}$$

ここで、

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2^3-3\cdot\frac{1}{3}\cdot2=6$$

$$\alpha^3\cdot\beta^3=(\alpha\beta)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

よって求める2次方程式は

$$x^2-6x+\frac{1}{27}=0$$

すなわち

$$27x^2-162x+1=0$$

108

$$2x^2+5x+8=0$$

解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{5}{2},\quad \alpha\beta=\frac{8}{2}=4$$

ここで

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{5}{2}}{4}=-\frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{4}$$

よって、求める2次方程式は

$$x^2-\left(-\frac{5}{8}\right)x+\frac{1}{4}=0$$

すなわち

$$8x^2+5x+2=0$$

109

$$3x^2+7x+p=0$$

他の解を α とすると、解と係数の関係から、

$$\alpha+\frac{2}{3}=-\frac{7}{3}\ \text{—①},\quad \frac{2}{3}\alpha=\frac{p}{3}\ \text{—②}$$

① から

$$\alpha=-\frac{7}{3}-\frac{2}{3}=-3$$

② へ代入して

$$p=2\alpha=2\cdot(-3)=-6$$

答 他の解 -3, $p=-6$

別 $x=\frac{2}{3}$ が $3x^2+7x+p=0$ の解なので

$3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+7\cdot\frac{2}{3}+p=0$ したがって $p=-6$

このときもとの2次方程式は

$$3x^2+7x-6=0$$

$(3x-2)(x+3)=0$ よって他の解は -3

「近い距離での会話はマスクなどをつけて」

110 $x^2+ax+b=0$ ——①

$3+2i$ が ① の解なので

$(3+2i)^2+a(3+2i)+b=0$

$9+12i+4i^2+3a+2ai+b=0$

$(3a+b+5)+(2a+12)i=0$

a, b は実数なので

$3a+b+5=0,\ 2a+12=0$

よって

$a=-6,\ b=13$

よって ① は $x^2-6x+13=0$ だから 解は

$x=-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot 13}$

$=3\pm 2i$

答 $a=-6, b=13$, 他の解 $3-2i$

111 $x^2+ax+b=0$ ——①

$x^2+2ax+b+2=0$ ——②

① の 2つの解が α, β なので

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$ ——③

② の 2つの解が $\alpha+\beta, \alpha\beta$ なので

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-2a,\ (\alpha+\beta)\alpha\beta=b+2$ ——④

③ を ④ に代入して α, β を消去すると、

$-a+b=-2a$ ——⑤ $-ab=b+2$ ——⑥

⑤ から $b=-a$ なので ⑥ へ代入して

$-a(-a)=-a+2$

$a^2+a-2=0$

$(a+2)(a-1)=0$ したがって $a=-2, 1$

$a=-2$ のとき $b=2$

$a=1$ のとき $b=-1$

答 $a=-2,\ b=2$ または $a=1,\ b=-1$

112 A君が解いた2次方程式は、解が $x=2, 3$ なので

$(x-2)(x-3)=0$

すなわち

$x^2-5x+6=0$

B君が解いた2次方程式は、解が $x=3, 4$ なので

$(x-3)(x-4)=0$

$x^2-7x+12=0$

A君は係数 b を間違え、B君は定数項 c を間違えているので、正しい方程式は、

$x^2-7x+6=0$

これを解いて

$(x-1)(x-6)=0$

よって、正しい解は $x=1, 6$

113 (1) $x^4-5x^2+6=(x^2-2)(x^2-3)$

$=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

したがって

(ア) $(x^2-2)(x^2-3)$

(イ)(ウ) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

(2) $3x^4+x^2-2=(3x^2-2)(x^2+1)$

$=(\sqrt{3}x+\sqrt{2})(\sqrt{3}x-\sqrt{2})(x^2+1)$

$=(\sqrt{3}x+\sqrt{2})(\sqrt{3}x-\sqrt{2})(x+i)(x-i)$

したがって

(ア) $(3x^2-2)(x^2+1)$

(イ) $(\sqrt{3}x+\sqrt{2})(\sqrt{3}x-\sqrt{2})(x^2+1)$

(ウ) $(\sqrt{3}x+\sqrt{2})(\sqrt{3}x-\sqrt{2})(x+i)(x-i)$