「ピンチをチャンスに」

62 $$(\sqrt{ab})^2-\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2=ab-\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$$
$$=\frac{ab(a+b)^2-4a^2b^2}{(a+b)^2}$$
$$=\frac{ab\{(a+b)^2-4ab\}}{(a+b)^2}$$
$$=\frac{ab(a^2-2ab+b^2)}{(a+b)^2}$$
$$=ab\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$$

$a>0,\ b>0,\ \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\geqq 0$ なので $ab\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\geqq 0$ であるから

$(\sqrt{ab})^2\geqq\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2$ は成り立つ。

$a>0,\ b>0$ から $\sqrt{ab}>0,\ \frac{2ab}{a+b}>0$ なので

$\sqrt{ab}\geqq\frac{2ab}{a+b}$ は成り立つ。

また、等号が成り立つのは、

$a-b=0$ すなわち $a=b$ のとき。

63 (1) $$(|a|+|b|)^2-(|a-b|)^2$$
$$=|a|^2+2|ab|+|b|^2-(a-b)^2$$
$$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)$$
$$=2(|ab|+ab)$$

$ab\geqq 0$ のとき $|ab|+ab=2ab\geqq 0$

$ab<0$ のとき $|ab|+ab=-ab+ab=0$

よって $2(|ab|+ab)\geqq 0$ であるから

$(|a|+|b|)^2\geqq(|a-b|)^2$

$|a|+|b|\geqq 0,\ |a-b|\geqq 0$ であるから

$|a|+|b|\geqq|a-b|$ は成り立つ。

また、等号が成り立つのは、

$|ab|+ab=0$ すなわち $|ab|=-ab$ のときだから

$ab\leqq 0$ のとき。

(2) (1)の不等式で $a=x-z,\ b=y-z$ とすると、

$|(x-z)-(y-z)|\leqq|x-z|+|y-z|$

よって

$|x-y|\leqq|x-z|+|y-z|$

「規則正しい生活をしよう」

64 $\boxed{\text{方針}}$ $A<B<C$ を証明するときは $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ を証明する。

$$(|x|+|y|)^2-(\sqrt{x^2+y^2})^2$$
$$=x^2+2|xy|+y^2-(x^2+y^2)=2|xy|\geqq 0$$

よって

$$(\sqrt{x^2+y^2})^2\leqq(|x|+|y|)^2$$

$\sqrt{x^2+y^2}\geqq 0$, $|x|+|y|\geqq 0$ なので

$$\sqrt{x^2+y^2}\leqq|x|+|y| \quad \text{―――― ①}$$

$$(\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2})^2-(|x|+|y|)^2$$
$$=2(x^2+y^2)-(x^2+2|xy|+y^2)$$
$$=x^2-2|xy|+y^2$$
$$=(|x|-|y|)^2\geqq 0$$

よって

$$(|x|+|y|)^2\leqq(\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2})^2$$

$|x|+|y|\geqq 0$, $\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\geqq 0$ なので

$$|x|+|y|\leqq\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{―――― ②}$$

①②から

$\sqrt{x^2+y^2}\leqq|x|+|y|\leqq\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$ は成り立つ。

65 (1)

$$a^2-ab+b^2-(a+b-1)$$
$$=a^2-(b+1)a+b^2-b+1$$
$$=\left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2-\left(\frac{b+1}{2}\right)^2+b^2-b+1$$
$$=\left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2-\frac{b^2+2b+1}{4}+b^2-b+1$$
$$=\left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2-\frac{3}{2}b+\frac{3}{4}$$
$$=\left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-1)^2$$

$\left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2\geqq 0$, $(b-1)^2\geqq 0$ なので

$$\left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-1)^2\geqq 0$$

よって

$a^2-ab+b^2\geqq a+b-1$ は成り立つ。

また、等号が成り立つのは

$a-\frac{b+1}{2}=0$, $b-1=0$ すなわち $a=b=1$ のとき。

「トイレそうじを手伝ってみよう」

(2)[1] $2|a|-3|b|<0$ のとき $|2a-3b| \geqq 0$ だから

$2|a|-3|b| \leqq |2a-3b|$ は成り立つ。

[2] $2|a|-3|b| \geqq 0$ のとき

$$|2a-3b|^2-(2|a|-3|b|)^2$$
$$=4a^2-12ab+9b^2-(4a^2-12|ab|+9b^2)$$
$$=12(|ab|-ab)$$

$|ab| \geqq ab$ なので $12(|ab|-ab) \geqq 0$ であるから，

$(2|a|-3|b|)^2 \leqq |2a-3b|^2$

は成り立つ。

$2|a|-3|b| \geqq 0$，$|2a-3b| \geqq 0$ なので

$2|a|-3|b| \leqq |2a-3b|$

は成り立つ。

[1][2]から

$2|a|-3|b| \leqq |2a-3b|$

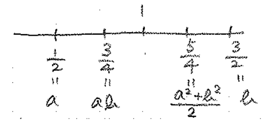
66 Hint：① a, b のとる値の範囲をそれぞれ確認しておく。

② $1, a, ab, \frac{a^2+b^2}{2}$ の大小は，条件を満たす a, b の値を適当に決めて，ある程度見当をつけて証明していく。

(例：$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{3}{2}$ とすると，

$ab=\frac{3}{4}$，$\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{5}{4}$ なので

$a<ab<1<\frac{a^2+b^2}{2}$)



$a>0$，$b>0$，$a+b=2$ から，

$0<a<1$，$1<b<2$

[1] $a<ab$ を示す。

$ab-a=a(b-1)$

$a>0$ であることと，$b>1$ より $b-1>0$ であることから，$a(b-1)>0$

よって

$a<ab$

[2] $ab<1$ を示す。

$a+b=2$ から $b=2-a$ なので

$1-ab=1-a(2-a)=a^2-2a+1=(a-1)^2$

$a \neq 1$ なので $(a-1)^2>0$ だから，

$ab<1$

[3] $1<\frac{a^2+b^2}{2}$ を示す。

$$\frac{a^2+b^2}{2}-1=\frac{a^2+(2-a)^2}{2}-1=a^2-2a+1$$
$$=(a-1)^2$$

$a \neq 1$ なので $(a-1)^2>0$ だから

$1<\frac{a^2+b^2}{2}$

[1][2][3]から小さい順に並べると

$a<ab<1<\frac{a^2+b^2}{2}$

「笑顔でいよう」

67 $a+b=1$ から $b=1-a$ なので

$$(\sqrt{ax+by})^2-(a\sqrt{x}+b\sqrt{y})^2$$
$$=ax+by-a^2x-2ab\sqrt{xy}-b^2y$$
$$=ax+(1-a)y-a^2x-2a(1-a)\sqrt{xy}-(1-a)^2y$$
$$=ax+y-ay-a^2x-2a(1-a)\sqrt{xy}-(1-a)^2y$$
$$=ax+\cancel{y}-ay-a^2x-2a(1-a)\sqrt{xy}-\cancel{y}+2ay-a^2y$$
$$=ax-a^2x-2a(1-a)\sqrt{xy}+ay-a^2y$$
$$=a(1-a)x-2a(1-a)\sqrt{xy}+ay(1-a)$$
$$=a(1-a)(x-2\sqrt{xy}+y)$$
$$=a(1-a)(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$$

$a>0$, $b>0$, $a+b=1$ から $0<a<1$ なので $1-a>0$.
また $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geqq 0$ であるから

$$a(1-a)(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geqq 0$$

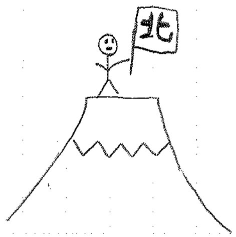
したがって

$$(\sqrt{ax+by})^2\geqq(a\sqrt{x}+b\sqrt{y})^2$$

$\sqrt{ax+by}>0$, $a\sqrt{x}+b\sqrt{y}>0$ なので

$\sqrt{ax+by}\geqq a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ である。

等号が成り立つのは $\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$ すなわち $x=y$ のとき。



第1章はここまで。
次ページから第2章が
始まります。
残り半分、がんばりましょう。

82 (1) $(2-3i)^2+(2+3i)^2$
$$=4-12i+9i^2+4+12i+9i^2$$
$$=8+18i^2$$
$$=8-18$$
$$=-10$$

(2)
$$\left(\frac{2}{-\sqrt{3}+i}\right)^2=\frac{4}{3-2\sqrt{3}i+i^2}=\frac{4}{3-2\sqrt{3}i-1}=\frac{4}{2-2\sqrt{3}i}$$
$$=\frac{2}{1-\sqrt{3}i}=\frac{2(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$
$$=\frac{2(1+\sqrt{3}i)}{1-3i^2}=\frac{2(1+\sqrt{3}i)}{4}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

別

$$\frac{2}{-\sqrt{3}+i}=\frac{2(-\sqrt{3}-i)}{(-\sqrt{3}+i)(-\sqrt{3}-i)}=\frac{2(-\sqrt{3}-i)}{3-i^2}=\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$$

よって

$$\left(\frac{2}{-\sqrt{3}+i}\right)^2=\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right)^2=\frac{3+2\sqrt{3}i+i^2}{4}=\frac{2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

83 (1)
$$\frac{1+3i}{2-i}+\frac{i}{1+2i}=\frac{(1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}+\frac{i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$
$$=\frac{2+7i+3i^2}{4-i^2}+\frac{i-2i^2}{1-4i^2}$$
$$=\frac{-1+7i}{5}+\frac{2+i}{5}$$
$$=\frac{1+8i}{5}$$

「5月7日、学校が始まると信じる」

83 (2)

$$\frac{1-3i}{1+3i}+\frac{1+3i}{1-3i}=\frac{(1-3i)^2+(1+3i)^2}{(1+3i)(1-3i)}$$

$$=\frac{1-6i+9i^2+1+6i+9i^2}{1-9i^2}$$

$$=\frac{2+18i^2}{1+9}=\frac{-16}{10}=-\frac{8}{5}$$

(3)

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}i}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)}-\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-2i-3i+\sqrt{6}i^2}{3-2i^2}-\frac{\sqrt{6}+3i+2i+\sqrt{6}i^2}{2-3i^2}$$

$$=\frac{-5i}{5}-\frac{5i}{5}=0$$

84 $x=\frac{-1+\sqrt{5}i}{2}$, $y=\frac{-1-\sqrt{5}i}{2}$ なので

$$x+y=\frac{-1+\sqrt{5}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{5}i}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$xy=\frac{-1+\sqrt{5}i}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{5}i}{2}=\frac{1-5i^2}{4}=\frac{3}{2}$$

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(-1)^2-2\cdot\frac{3}{2}=-2$

(2) $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{-2}{\frac{3}{2}}=-\frac{4}{3}$

(3) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(-1)^3-3\cdot\frac{3}{2}(-1)=\frac{7}{2}$

別

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=-1\left(-2-\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{2}$

85 (1) $(2+3i)x+(2i-3)y=7i-4$

左辺を i について整理すると、

$(3x+2y)i+(2x-3y)=7i-4$

x, y は実数なので

$$\begin{cases}3x+2y=7\\2x-3y=-4\end{cases}$$

これを解いて

$x=1,\ y=2$

(2) $(1-2i)(x+yi)=2+6i$

左辺を展開して i について整理すると

$x+yi-2xi-2yi^2=2+6i$

$(x+2y)+(-2x+y)i=2+6i$

x, y は実数なので

$$\begin{cases}x+2y=2\\-2x+y=6\end{cases}$$

これを解いて

$x=-2,\ y=2$

(3) $x(1+2i)^2+y(1-i)^2+6=0$

左辺を展開して、i について整理すると

$x(1+4i+4i^2)+y(1-2i+i^2)+6=0$

$-3x+4xi-2yi+6=0$

$(-3x+6)+(4x-2y)i=0$

x, y は実数なので

$$\begin{cases}-3x+6=0\\4x-2y=0\end{cases}$$

これを解いて

$x=2,\ y=4$

「いつか笑って話せる日がくる」

86

$$\alpha=\frac{x-i}{2+i}=\frac{(x-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2x-xi-2i+i^2}{4-i^2}$$
$$=\frac{(2x-1)-(x+2)i}{5}$$

(1) α が実数となるとき

$x+2=0$ 　したがって　$x=-2$

(2) α が純虚数となるとき

$2x-1=0$ ――① 　かつ　$x+2\neq 0$ ――②

① から

$x=\frac{1}{2}$ （これは ② を満たす）

87

$$\frac{a+2i}{1+3i}=1+bi$$

両辺に $1+3i$ をかけて整理すると

$a+2i=(1+bi)(1+3i)$

$a+2i=1+3i+bi+3bi^2$

$a+2i=(1-3b)+(3+b)i$

a, b は実数なので

$$\begin{cases} a=1-3b \\ 2=3+b \end{cases}$$

これを解いて

$a=4$ ，$b=-1$

別 $\frac{a+2i}{1+3i}=\frac{(a+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{a-3ai+2i-6i^2}{1-9i^2}=\frac{(a+6)+(-3a+2)i}{10}$

a, b が実数で，これが $1+bi$ と一致するので

$\frac{a+6}{10}=1$ ，$\frac{-3a+2}{10}=b$

これを解いて　$a=4$ ，$b=-1$

92

(1) $-3x^2+2x-1=0$

両辺に -1 をかけて

$3x^2-2x+1=0$

解の公式から

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-3\cdot 1}}{3}=\frac{1\pm\sqrt{-2}}{3}=\frac{1\pm\sqrt{2}i}{3}$$

(2) $x^2-\sqrt{3}x+2=0$

解の公式から

$$x=\frac{-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{-5}}{2}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{5}i}{2}$$

(3) $(2x-3)^2=x-2$

$4x^2-12x+9=x-2$

$4x^2-13x+11=0$

解の公式から

$$x=\frac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4\cdot 4\cdot 11}}{2\cdot 4}=\frac{13\pm\sqrt{-7}}{8}=\frac{13\pm\sqrt{7}i}{8}$$

(4) $x^2+(m-1)x+m^2=0$ ――①

判別式を D とすると

$D=(m-1)^2-4\cdot 1\cdot m^2=-3m^2-2m+1$

① が実数解をもつとき $D\geqq 0$ だから

$-3m^2-2m+1\geqq 0$

$3m^2+2m-1\leqq 0$

$(m+1)(3m-1)\leqq 0$

よって

$-1\leqq m\leqq \frac{1}{3}$