「やまない雨はない」

38 $2x+1=a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)$

右辺を展開して整理すると

$2x+1=ax^2+ax+a+bx^2-bx+cx-c$

$=(a+b)x^2+(a-b+c)x+a-c$

これが x についての恒等式なので

$$\begin{cases} a+b=0 & \text{——①} \\ a-b+c=2 & \text{——②} \\ a-c=1 & \text{——③} \end{cases}$$

③より $c=a-1$　これを②へ代入して

$a-b+a-1=2$　よって $2a-b=3$ —④

①④から

$a=1,\ b=-1$

③へ代入して　$c=0$　　答　$a=1,\ b=-1,\ c=0$

39 (1) $\dfrac{x+8}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+3}$

両辺に $(x-2)(x+3)$ をかけて整理すると

$x+8=a(x+3)+b(x-2)$

$x+8=(a+b)x+3a-2b$

これが x についての恒等式なので

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 3a-2b=8 \end{cases}$$

よって

$a=2,\ b=-1$

(2) $\dfrac{a}{2x+1}+\dfrac{b}{x+3}=\dfrac{4x-3}{2x^2+7x+3}$

$\dfrac{a}{2x+1}+\dfrac{b}{x+3}=\dfrac{4x-3}{(2x+1)(x+3)}$

両辺に $(2x+1)(x+3)$ をかけて整理すると

$a(x+3)+b(2x+1)=4x-3$

$(a+2b)x+3a+b=4x-3$

これが x についての恒等式なので

$$\begin{cases} a+2b=4 \\ 3a+b=-3 \end{cases}$$

よって

$a=-2,\ b=3$

40 $2x^3+ax^2-3x-2=(x^2+3x-5)(bx+c)+4x+3$

右辺を展開して整理すると

$2x^3+ax^2-3x-2=bx^3+cx^2+3bx^2+3cx-5bx-5c+4x+3$

$=bx^3+(3b+c)x^2+(-5b+3c+4)x-5c+3$

これが x についての恒等式なので

$$\begin{cases} 2=b & \text{——①} \\ a=3b+c & \text{——②} \\ -3=-5b+3c+4 & \text{——③} \\ -2=-5c+3 & \text{——④} \end{cases}$$

①,②,④から

$a=7,\ b=2,\ c=1$

これは③を満たす。

答　$a=7,\ b=2,\ c=1$

「明けない夜はない」

41 $(k+1)x-(2k+3)y-3k-5=0$

これを k について整理すると、

$kx+x-2yk-3y-3k-5=0$

$(x-2y-3)k+x-3y-5=0$

これが k の どのような値に対しても成り立つので

$$\begin{cases} x-2y-3=0 \\ x-3y-5=0 \end{cases}$$

よって

$x=-1,\ y=-2$

42 (1) $x^2+y^2=a(x+y)^2+b(x-y)^2$

右辺を展開して整理すると

$x^2+y^2=a(x^2+2xy+y^2)+b(x^2-2xy+y^2)$

$=(a+b)x^2+(2a-2b)xy+(a+b)y^2$

これが x,y についての恒等式なので、両辺の係数を比較して

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a-2b=0 \end{cases}$$

よって

$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$

(2) $xy=a(x+y)^2+b(x-y)^2$

右辺を展開して整理すると

$xy=(a+b)x^2+(2a-2b)xy+(a+b)y^2$

これが x,y についての恒等式なので、両辺の係数を比較して

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a-2b=1 \end{cases}$$

よって、

$a=\frac{1}{4},\ b=-\frac{1}{4}$

43 (1) x^3+ax^2+x+3 を x^2+x+1 で割ったときの商は1次式だから、商を $bx+c$ とおくと、余りが $x+4$ なので、次の等式が成り立つ。

$x^3+ax^2+x+3=(x^2+x+1)(bx+c)+x+4$

右辺を展開して整理すると、

$x^3+ax^2+x+3=bx^3+(b+c)x^2+(b+c+1)x+c+4$

これが x についての恒等式なので

$$\begin{cases} 1=b & \text{——①} \\ a=b+c & \text{——②} \\ 1=b+c+1 & \text{——③} \\ 3=c+4 & \text{——④} \end{cases}$$

①,②,④から

$a=0,\ b=1,\ c=-1$

これは③を満たす。 答 $a=0$, 商 $x-1$

(2) $2x^3-x^2+ax+b$ を $(x-1)^2$ で割ったときの商は1次式だから、商を $cx+d$ とおくと、割り切れるので、余りは0だから、次の等式が成り立つ。

$2x^3-x^2+ax+b=(x-1)^2(cx+d)$

右辺を展開して整理すると

$2x^3-x^2+ax+b=(x^2-2x+1)(cx+d)$

$=cx^3+(-2c+d)x^2+(c-2d)x+d$

これが x についての恒等式なので

$$\begin{cases} 2=c \\ -1=-2c+d \\ a=c-2d \\ b=d \end{cases}$$

よって、

$a=-4,\ b=3,\ c=2,\ d=3$ 答 $a=-4,\ b=3$

余り $2x+3$

「体を動かすことも忘れずに」

46 (1) (右辺) $= \frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

$= \frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+c^2+2ca+a^2)$

$= \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca)$

$= a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

$=$ (右辺)

よって

$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca = \frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

は成り立つ。

(2) $a+b-1=0$ から $b=1-a$ である。よって

(左辺) $= a^2+b^2+1$

$= a^2+(1-a)^2+1$

$= 2a^2-2a+2$

(右辺) $= 2(a+b-ab)$

$= 2\{a+1-a-a(1-a)\}$

$= 2(a^2-a+1)$

$= 2a^2-2a+2$

よって

$a+b-1=0$ のとき $a^2+b^2+1=2(a+b-ab)$

は成り立つ。

47 (1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ とおくと $a=bk,\ c=dk$

[1] (左辺) $= \frac{a+c}{b+d} = \frac{bk+dk}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k$

(右辺) $= \frac{a+2c}{b+2d} = \frac{bk+2dk}{b+2d} = \frac{k(b+2d)}{b+2d} = k$

よって、$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a+2c}{b+2d}$ は成り立つ。

[2] (左辺) $= \frac{ab}{a^2+b^2} = \frac{bk\cdot b}{(bk)^2+b^2} = \frac{b^2k}{b^2(k^2+1)} = \frac{k}{k^2+1}$

(右辺) $= \frac{cd}{c^2+d^2} = \frac{dk\cdot d}{(dk)^2+d^2} = \frac{d^2k}{d^2(k^2+1)} = \frac{k}{k^2+1}$

よって、$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき $\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{cd}{c^2+d^2}$ は成り立つ。

48 (1) $a:b:c=3:5:2$ なので、定数 k を用いて

$a=3k,\ b=5k,\ c=2k$

と表すことができる。よって、

$\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2} = \frac{(3k)^2+(5k)^2-(2k)^2}{(3k)^2-(5k)^2+(2k)^2} = \frac{30\cancel{k^2}}{-12\cancel{k^2}} = -\frac{5}{2}$

(2) $a:b:c=1:3:4$ なので定数 k を用いて

$a=k,\ b=3k,\ c=4k$

と表すことができる。$2a+4b+c=-36$ なので

$2k+12k+4k=-36$

これを解いて

$k=-2$

よって

$a=-2,\ b=-6,\ c=-8$

「上を向いて歩こう」

49 $(x-1)(y-1)(z-1)$

$= \{xy-(x+y)+1\}(z-1)$

$= xyz-xy-(x+y)z+(x+y)+z-1$

$= xyz-(xy+yz+zx)+x+y+z-1$ —— ①

ここで、

$x+y+z=1$, $xy+yz+zx=xyz$ なので ① は

$(x-1)(y-1)(z-1)$

$= xyz-xyz+1-1$

$= 0$

このことから

$x-1=0$ または $y-1=0$ または $z-1=0$

よって、x, y, z のうち、少なくとも 1つは 1 である。

50 $a+b+c=0$ から $a=-b-c$

よって

$$b^2+c^2-a^2 = b^2+c^2-(-b-c)^2$$
$$= b^2+c^2-(b^2+2bc+c^2)$$
$$= -2bc$$

また、同様にして

$$c^2+a^2-b^2 = c^2+a^2-(-c-a)^2$$
$$= c^2+a^2-(c^2+2ca+a^2)$$
$$= -2ca$$

$$a^2+b^2-c^2 = a^2+b^2-(-a-b)^2$$
$$= a^2+b^2-(a^2+2ab+b^2)$$
$$= -2ab$$

よって

$$(\text{左辺}) = (b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)$$
$$= -2bc(-2ca)(-2ab)$$
$$= -8a^2b^2c^2 = (\text{右辺})$$

51 $\dfrac{y+z}{b-c} = \dfrac{z+x}{c-a} = \dfrac{x+y}{a-b} = k$ とおく。

$y+z = k(b-c)$

$z+x = k(c-a)$

$x+y = k(a-b)$

辺々加えると

$$2(x+y+z) = k(b-c+c-a+a-b)$$
$$= 0$$

よって、$\dfrac{y+z}{b-c} = \dfrac{z+x}{c-a} = \dfrac{x+y}{a-b}$ のとき $x+y+z=0$ は成り立つ。

52 $(x-a)(y-a)(z-a)$

$= \{xy-a(x+y)+a^2\}(z-a)$

$= xyz-axy-a(x+y)z+a^2(x+y)+a^2z-a^3$

$= xyz-a(xy+yz+zx)+a^2(x+y+z)-a^3$ —— ①

$x+y+z=a$, $a(xy+yz+zx)=xyz$ のとき ① は

$(x-a)(y-a)(z-a)$

$= xyz-xyz+a^2 a-a^3$

$= 0$

このことから

$x-a=0$ または $y-a=0$ または $z-a=0$

よって、x, y, z のうち少なくとも 1つは a である。

「一人じゃない。みんな一緒に生きていく」

56 (1) $\dfrac{4x+3y}{7}-x=\dfrac{4x+3y-7x}{7}=\dfrac{3}{7}(y-x)$

$x<y$ なので $\dfrac{3}{7}(y-x)>0$ であるから

$x<\dfrac{4x+3y}{7}$ ——①

次に

$y-\dfrac{4x+3y}{7}=\dfrac{7y-(4x+3y)}{7}=\dfrac{4}{7}(y-x)$

$x<y$ なので $\dfrac{4}{7}(y-x)>0$ であるから

$\dfrac{4x+3y}{7}<y$ ——②

①, ② から

$x<y$ のとき $x<\dfrac{4x+3y}{7}<y$ は成り立つ。

(2) $9x^2-y(6x-y)$

$=9x^2-6xy+y^2$

$=(3x-y)^2$

$(3x-y)^2\geqq 0$ だから $9x^2\geqq y(6x-y)$ は成り立つ。
また、等号が成り立つのは $3x-y=0$ すなわち、
$y=3x$ のときである。

57 $\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2=\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{a+2\sqrt{ab}+b}{4}$

$=\dfrac{a-2\sqrt{ab}+b}{4}=\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\right)^2$

$\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\right)^2\geqq 0$ だから $\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}\right)^2\geqq\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$ は成り立つ。

$\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}>0$, $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}>0$ なので

$\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}\geqq\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$ は成り立つ。

59 $\left(a+\dfrac{6}{b}\right)\left(\dfrac{b}{2}+\dfrac{3}{a}\right)=\dfrac{ab}{2}+3+3+\dfrac{18}{ab}$

$=\dfrac{ab}{2}+\dfrac{18}{ab}+6$

$a>0$, $b>0$ から $\dfrac{ab}{2}>0$, $\dfrac{18}{ab}>0$ なので、相加相乗平均の関係から

$\dfrac{ab}{2}+\dfrac{18}{ab}+6\geqq 2\sqrt{\dfrac{ab}{2}\cdot\dfrac{18}{ab}}+6=12$

よって

$\left(a+\dfrac{6}{b}\right)\left(\dfrac{b}{2}+\dfrac{3}{a}\right)\geqq 12$ は成り立つ。

また、等号が成り立つのは

$\dfrac{ab}{2}=\dfrac{18}{ab}$ すなわち $ab=6$ のときである。

「腹八分目」

60 $x+2>0$, $\frac{36}{x+2}>0$ だから. 相加相乗平均の関係から

$$x+2+\frac{36}{x+2} \geqq 2\sqrt{\cancel{(x+2)}\cdot\frac{36}{\cancel{x+2}}}=12$$

等号が成り立つのは

$x+2=\frac{36}{x+2}$ すなわち $(x+2)^2=36$, $x>-2$ から $x=4$ のとき

である。よって,

$x+2+\frac{36}{x+2}$ は $x=4$ のとき 最小値 12 をとる。

よって.

$x+\frac{36}{x+2}$ は $x=4$ のとき 最小値 $12-2=10$ をとる。

61 (1)

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2-4(x-y-2)\\
&= x^2+y^2-4x+4y+8\\
&= x^2-4x+y^2+4y+8\\
&= (x-2)^2-4+(y+2)^2-4+8\\
&= (x-2)^2+(y+2)^2
\end{aligned}$$

$(x-2)^2 \geqq 0$, $(y+2)^2 \geqq 0$ から $(x-2)^2+(y+2)^2 \geqq 0$ なので

$x^2+y^2 \geqq 4(x-y-2)$ は成り立つ。

また等号が成り立つのは

$x-2=0$ かつ $y+2=0$ すなわち $x=2, y=-2$ のとき。

(2)

$$\begin{aligned}
&x^2+2xy+5y^2-4x-8y+5\\
&= x^2+(2y-4)x+5y^2-8y+5\\
&= (x+y-2)^2-(y-2)^2+5y^2-8y+5\\
&= (x+y-2)^2-y^2+4y-4+5y^2-8y+5\\
&= (x+y-2)^2+4y^2-4y+1\\
&= (x+y-2)^2+(2y-1)^2
\end{aligned}$$

$(x+y-2)^2 \geqq 0$, $(2y-1)^2 \geqq 0$ なので

$x^2+2xy+5y^2-4x-8y+5 \geqq 0$ は成り立つ。

また、等号が成り立つのは

$x+y-2=0$ かつ $2y-1=0$ すなわち, $x=\frac{3}{2}, y=\frac{1}{2}$ のとき。

(3)

$$\begin{aligned}
&3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2\\
&= 3x^2+3y^2+3z^2-(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)\\
&= 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\\
&= x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2zx+x^2\\
&= (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2
\end{aligned}$$

$(x-y)^2 \geqq 0$, $(y-z)^2 \geqq 0$, $(z-x)^2 \geqq 0$ なので

$3(x^2+y^2+z^2) \geqq (x+y+z)^2$ は成り立つ。

また、等号が成り立つのは

$x-y=0$, $y-z=0$, $z-x=0$ すなわち $x=y=z$ のとき。