5 (1) $(2a+b)^2(4a^2-2ab+b^2)^2$

$= \{(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)\}^2$

$= (8a^3+b^3)^2$

$= 64a^6+16a^3b^3+b^6$

(2) $(x+3)(x-3)(x^4+9x^2+81)$

$=(x^2-9)(x^4+9x^2+81)$

$= x^6+9x^4+81x^2-9x^4-81x^2-729$

$= x^6-729$

別 はじめに x^4+9x^2+81 を因数分解する方法

$x^4+9x^2+81 = x^4+18x^2+81-9x^2$

$=(x^2+9)^2-(3x)^2$

$=(x^2+9+3x)(x^2+9-3x)$

$=(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

よって

(与式)$=(x+3)(x^2-3x+9)(x-3)(x^2+3x+9)$

$=(x^3+27)(x^3-27)$

$=(x^3)^2-27^2$

$=x^6-729$

(3) $(x+y)(x-2y)(x^2-xy+y^2)(x^2+2xy+4y^2)$

$= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

$= (x^3+y^3)(x^3-8y^3)$

$= x^6-7x^3y^3-8y^6$

6 (1) $x^3-6x^2+12x-8$ どう組み合わせるか考える。

$=(x^3-8)+(-6x^2+12x)$

$=(x-2)(x^2+2x+4)-6x(x-2)$ ←$(x-2)$が共通因数

$=(x-2)(x^2+2x+4-6x)$

$=(x-2)(x^2-4x+4)$

$=(x-2)(x-2)^2$

$=(x-2)^3$

別 因数定理を用いる方法

$P(x)=x^3-6x^2+12x-8$ とおく。

$P(2)=8-24+24-8=0$

よって $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

右の割り算より

$P(x)=(x-2)(x^2-4x+4)$

よって

$P(x)=(x-2)^3$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 12 & -8 & 2 \\ & 2 & -8 & 8 & \\ \hline 1 & -4 & 4 & \boxed{0} & \end{array}$$

(2) $8x^3+6x^2+3x+1$

$=(8x^3+1)+(6x^2+3x)$

$=(2x+1)(4x^2-2x+1)+3x(2x+1)$

$=(2x+1)(4x^2-2x+1+3x)$

$=(2x+1)(4x^2+x+1)$

(3) $64a^3-240a^2b+300ab^2-125b^3$

$=(64a^3-125b^3)+(-240a^2b+300ab^2)$

$=\{(4a)^3-(5b)^3\}-60ab(4a-5b)$

$=(4a-5b)\{(4a)^2+4a\cdot 5b+(5b)^2\}-60ab(4a-5b)$

$=(4a-5b)(16a^2+20ab+25b^2-60ab)$

$=(4a-5b)(16a^2-40ab+25b^2)$

$=(4a-5b)(4a-5b)^2$

$=(4a-5b)^3$

11 $(3x-2y)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6C_r(3x)^r(-2y)^{6-r}$$
$$={}_6C_r\,3^r(-2)^{6-r}\,x^r y^{6-r}$$

x^3y^3 の項は $r=3$ のときだから、この項の係数は

$${}_6C_3\cdot 3^3(-2)^3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\,27\cdot(-8)=-4320$$

12 (1) $(x^2+2)^7$ の展開式の一般項は

$${}_7C_r(x^2)^r2^{7-r}={}_7C_r\,2^{7-r}\,x^{2r}$$

$2r=10$ とおくと $r=5$ だから、x^{10} の係数は

$${}_7C_5\,2^2=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}\cdot4=84$$

(2) $(x^3-x)^5$ の展開式の一般項は

$${}_5C_r(x^3)^r(-x)^{5-r}={}_5C_r(-1)^{5-r}\,x^{3r}\,x^{5-r}$$
$$={}_5C_r(-1)^{5-r}\,x^{2r+5}$$

$2r+5=9$ とおくと $r=2$ だから x^9 の係数は

$${}_5C_2(-1)^3=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot(-1)=-10$$

13 (1) $(a+b+c)^6$ の展開式の ab^3c^2 の項は

$$\frac{6!}{1!3!2!}ab^3c^2$$

よって求める係数は

$$\frac{6!}{1!3!2!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=60$$

(2) $(x-3y+2z)^9$ の展開式の $x^4y^2z^3$ の項は

$$\frac{9!}{4!2!3!}x^4(-3y)^2(2z)^3$$

よって求める係数は

$$\frac{9!}{4!2!3!}(-3)^2\cdot2^3=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1}\,9\cdot8=90720$$

14 (1) $\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6C_r(x^3)^r\left(\frac{1}{x}\right)^{6-r}={}_6C_r\,\frac{x^{3r}}{x^{6-r}}$$

$\frac{x^{3r}}{x^{6-r}}=x^2$ とすると $x^{3r}=x^2x^{6-r}$ よって $x^{3r}=x^{8-r}$

両辺の x の指数を比較して $3r=8-r$ ゆえに $r=2$

したがって求める係数は

$${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$$

(2) $\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^5$ の展開式の一般項は

$${}_5C_r(x^2)^r\cdot\left(\frac{3}{x}\right)^{5-r}={}_5C_r\,3^{5-r}\cdot\frac{x^{2r}}{x^{5-r}}$$

$\frac{x^{2r}}{x^{5-r}}=x^4$ とすると $x^{2r}=x^4\cdot x^{5-r}$ よって $x^{2r}=x^{9-r}$

両辺の x の指数を比較して $2r=9-r$ よって $r=3$

したがって求める係数は

$${}_5C_3\cdot3^2=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}\cdot9=90$$

15 二項定理より

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_{n-1}ab^{n-1}+{}_nC_nb^n$$

この等式で $a=1,\ b=-1$ とすると、n が奇数であることから

$$0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+{}_nC_{n-1}-{}_nC_n$$

よって

$${}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n$$

16 二項定理より

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + {}_nC_3 x^3 + \cdots + {}_nC_n x^n \quad \text{―①}$$

$x > 0$ のとき

$${}_nC_3 x^3 + \cdots + {}_nC_n x^n > 0 \quad \leftarrow \text{①の〰部}$$

よって①から

$$(1+x)^n > {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2$$

すなわち

$$(1+x)^n > 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

17 $\left(2x^2 - \frac{1}{3x^3}\right)^5$ の展開式の一般項は

$${}_5C_r(2x^2)^r\left(-\frac{1}{3x^3}\right)^{5-r} = {}_5C_r\, 2^r\left(-\frac{1}{3}\right)^{5-r}\cdot\frac{x^{2r}}{(x^3)^{5-r}}$$

$\frac{x^{2r}}{(x^3)^{5-r}} = \frac{1}{x^5}$ とおくと $x^{2r}\cdot x^5 = (x^3)^{5-r}$ よって $x^{2r+5} = x^{3(5-r)}$

両辺の x の係数を比較して

$2r+5 = 3(5-r)$ ゆえに $r=2$

したがって、求める係数は

$${}_5C_2\cdot 2^2\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot4\left(-\frac{1}{27}\right) = -\frac{40}{27}$$

18 (1) 求める係数は $\frac{9!}{5!1!3!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{1\cdot3\cdot2\cdot1} = 504$

(2) $(x+y-2z)^8$ の展開式における $x^3y^3z^2$ の項は

$$\frac{8!}{3!3!2!}x^3y^3(-2z)^2 = \frac{8!}{3!3!2!}(-2)^2x^3y^3z^2$$

よって求める係数は

$$\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}\cdot4 = 2240$$

(3) 求める係数は

$$\frac{7!}{2!3!2!}(-2)^3 3^2 = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{2\cdot1\cdot2\cdot1}(-8)\cdot9 = -15120$$

19 (1) $(x^2+x+2)^5$ の展開式の一般項は

$$\frac{5!}{p!q!r!}(x^2)^p x^q 2^r = \frac{5!}{p!q!r!}2^r x^{2p+q}$$

（ただし、$p+q+r=5,\ p\geqq0,\ q\geqq0,\ r\geqq0$）

$2p+q=3$ となるのは

(i) $p=0,\ q=3$ または (ii) $p=1,\ q=1$ のときである。

(i) のとき $p+q+r=5$ から $r=2$

(ii) のとき $p+q+r=5$ から $r=3$

よって求める係数は

$$\frac{5!}{0!3!2!}2^2 + \frac{5!}{1!1!3!}2^3 = \frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot4 + \frac{5\cdot4}{1\cdot1}\cdot8 = 200$$

(2) $(x^2+2x-1)^8$ の展開式の一般項は

$$\frac{8!}{p!q!r!}(x^2)^p(2x)^q(-1)^r = \frac{8!}{p!q!r!}2^q(-1)^r x^{2p+q}$$

（ただし、$p+q+r=8,\ p\geqq0,\ q\geqq0,\ r\geqq0$）

$2p+q=5$ となるのは

(i) $p=0, q=5$ または (ii) $p=1, q=3$ または (iii) $p=2, q=1$

のときである。

(i) のとき $p+q+r=8$ から $r=3$

(ii) のとき $p+q+r=8$ から $r=4$

(iii) のとき $p+q+r=8$ から $r=5$

よって、求める係数は

$$\frac{8!}{0!5!3!}2^5\cdot(-1)^3 + \frac{8!}{1!3!4!}2^3\cdot(-1)^4 + \frac{8!}{2!1!5!}2^1(-1)^5$$

$$= -1792 + 2240 - 336 = 112$$